

# Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction

Jean-Luc Battaglia<sup>a\*</sup>, Ludovic Le Lay<sup>b</sup>, Jean-Christophe Batsale<sup>a</sup>, Alain Oustaloup<sup>b</sup>, Olivier Cois<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire «Energétique et Phénomènes de transfert», ENSAM, UMR CNRS, Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence cedex, France

<sup>b</sup> Laboratoire d'Automatique et de Productique, Université Bordeaux 1, ENSERB, 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex, France

(Reçu le 24 mars 1999, accepté le 31 août 1999)

**Résumé** — Nous proposons d'appliquer une méthode d'identification du comportement thermique instationnaire d'un système par un modèle d'ordre non entier. Ce modèle s'exprime sous la forme d'une relation linéaire liant les dérivées fractionnaires de la température en un point du système aux dérivées fractionnaires de la sollicitation appliquée. Ces dérivées sont remplacées par leurs définitions discrètes et les coefficients du modèle sont identifiés à partir de mesures expérimentales par une méthode des moindres carrés linéaires. L'application sur un milieu semi-infini montre la nécessité d'utiliser un ordre non-entier dans la procédure d'identification du modèle d'évolution de la température à la surface du milieu, soumise à un flux de chaleur. Un exemple d'utilisation du modèle non entier identifié consiste dans l'estimation du flux de chaleur appliqué à la surface du milieu semi-infini. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**identification de modèles / ordre non entier / milieu semi-infini / méthodes inverses**

**Abstract** — Heat flux estimation through inverted non-integer identification models. A model of non-integer order that reproduced the transient thermal behaviour of a system is identified. This model is expressed as a linear relationship between the fractionnal derivates of the temperature at a point of the medium and those of the solicitation applied on the system. Using recursive form of the derivates lead to identify the unknowns of the model applying the linear least square method from experimental data. The application concerned a semi-infinite medium submitted to a single heat flux on its surface. Among the applications of this approach, the identified model is used in an inverse technique to estimate the heat flux applied on the medium. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**model identification / non-integer order / semi-infinite medium / inverse techniques**

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	matrices pour l'inversion	
$A_I, b_j$	paramètres du modèle récurrent	
$\alpha_i, \beta_j$	paramètre du modèle différentiel	
$C_p$	capacité thermique massique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$D$	opérateur de différentiation	
$e(t)$	résidus	
$E$	espérance mathématique	
$\mathbf{E}$	vecteur des résidus	
$f(t)$	fonction quelconque du temps	
$h$	période d'échantillonnage	s
$h(t)$	fonction Heaviside	
$\mathbf{H}$	matrice de régression	

$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2,$		
$\mathbf{H}_3$	matrices pour la régularisation	
$i, j, k,$		
$n, K$	indices	
$\lambda$	conductivité thermique	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$n_{\alpha_i}, n_{\beta_j}$	ordres de dérivation	
$N$	nombre d'échantillons	
$p$	variable de Laplace	
$\rho$	masse volumique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\psi$	critère d'arrêt	
$q$	sollicitation	W
$\tilde{q}(t)$	sollicitation modifiée dans le modèle	
	récurrent	
$\mathbf{Q}_e$	vecteur sollicitation estimé	
$\boldsymbol{\theta}_r$	$(\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$	
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_r$	$(a_1, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$	
$R_T$	résistance thermique	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$S(\tau), S_0$	fonctionnelles quadratiques	

\* Correspondance et tirés à part.  
jlb@lept-ensam.u-bordeaux.fr

$\sigma$	écart-type	
$\sigma^2$	variance	
$t$	temps . . . . .	s
$T$	température . . . . .	K
$\tilde{T}(t)$	température modifiée dans le modèle récurrent	
$\mathbf{T}$	vecteur des températures calculées . . . . .	K
$T$	coefficient de régularisation	
$W_0, W_1,$		
$W_2$	coefficient de pondération	
$x$	abscisse . . . . .	m
$\mathbf{X}$	matrice de sensibilité	
$\mathbf{Y}$	vecteur des températures mesurées . . . . .	K

## 1. INTRODUCTION

L'estimation de sollicitations thermiques (flux ou température) aux limites d'un système, de son état thermique initial ou de termes sources, concerne un important domaine d'applications en thermique instationnaire. Cette thématique intitulée « Problèmes Inverses en Conduction Thermique (PICT) », fait l'objet de nombreuses publications depuis plusieurs années. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Beck et al. [1] pour une description des méthodes de résolution classiques de ces problèmes.

La résolution d'un PICT est classiquement basée sur la minimisation d'une norme de l'écart entre la réponse d'un modèle représentatif du comportement thermique instationnaire en un ou plusieurs points du système et des mesures de température réalisées aux même points. La position et le nombre de capteurs se déduisent d'une analyse de sensibilité du modèle vis-à-vis de ces deux paramètres. Le modèle de diffusion thermique étant assimilable à celui d'un filtre passe-bas, l'inversion est donc toujours très sensible aux erreurs de mesures. Cette sensibilité s'accroît lorsque l'on utilise un modèle matriciel issu de la discréttisation spatiale du système par une méthode de type éléments finis par exemple. Des travaux récents [2] ont montré que dans ce cas, l'utilisation d'un modèle réduit du modèle de connaissance dans la procédure d'inversion permet de minimiser efficacement cette sensibilité au bruit de mesure.

Notre propos et le but de la présente étude reposent sur le fait que l'on ne connaît pas toujours toutes les caractéristiques du système (conductivité thermique, coefficients d'échange...). Or, ces caractéristiques sont nécessaires dans le modèle de connaissance pour la résolution du problème direct et donc pour celle du problème

inverse. Une solution retenue par certains auteurs [3] consiste à identifier ces caractéristiques en même temps que les sollicitations inconnues dans la procédure d'inversion. Cette approche est très délicate car le nombre de paramètres devient grand et leur domaine de confiance très restreint.

L'approche que nous proposons consiste à identifier par un modèle linéaire le comportement thermique instationnaire du système étudié. L'estimation paramétrique du modèle linéaire sous la forme d'une équation récurrente est une technique très usitée dans le domaine de l'automatique. Contrairement à l'élaboration classique d'un modèle de connaissance, celle d'un modèle de comportement par identification ne requiert aucune connaissance préalable des caractéristiques thermiques du système. En contrepartie, cette identification n'est possible que si l'on peut mesurer simultanément l'évolution des sollicitations et les températures en un ou plusieurs points d'observation du système. Ceci suggère qu'il peut être nécessaire de réaliser ces mesures dans des configurations différentes de celles du fonctionnement normal du système. Un exemple relatif à cette contrainte est celui de l'estimation des conditions thermiques de contact dans un procédé de tournage [4]. La procédure d'estimation des sollicitations pour des évolutions quelconques du système reposera alors sur la minimisation de l'écart entre la réponse du modèle estimé et les mesures de températures. Le synoptique de la figure 1 illustre la démarche précitée.

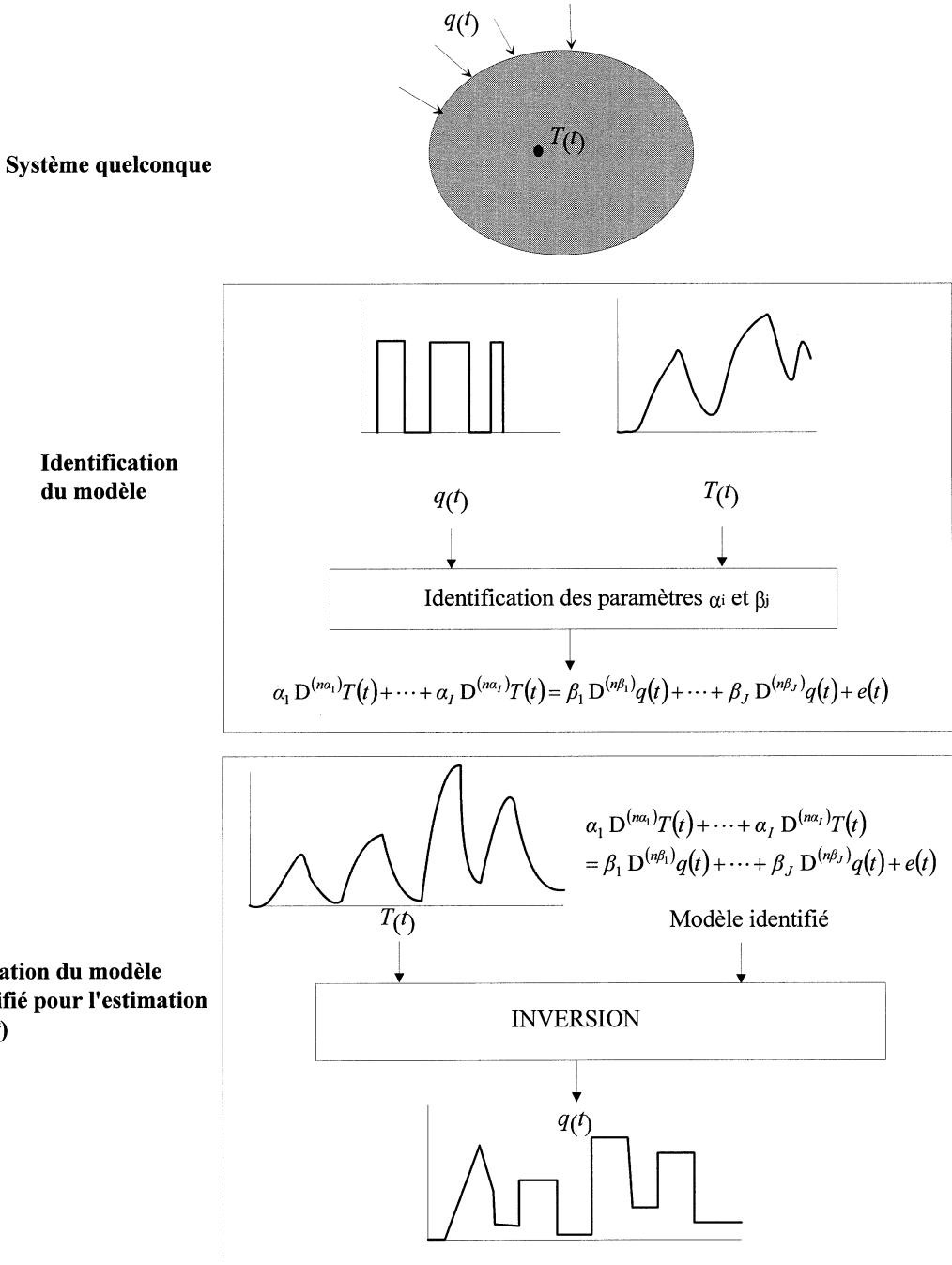
Afin de faciliter la présentation de l'exposé nous ne considérons qu'une seule sollicitation  $q(t)$  et un seul point d'observation pour la mesure de la température  $T(t)$  dans le système. L'existence d'une relation linéaire entre ces deux grandeurs s'exprime sous la forme d'une équation différentielle de la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_1 D^{(n_{\alpha_1})} T(t) + \cdots + \alpha_I D^{(n_{\alpha_I})} T(t) \\ = \beta_1 D^{(n_{\beta_1})} q(t) + \cdots + \beta_J D^{(n_{\beta_J})} q(t) + e(t) \quad (1) \end{aligned}$$

D désigne l'opérateur différentiel  $d/dt$  et  $e(t)$  l'erreur de modélisation ou résidu.

Lorsque les ordres de dérivation  $(n_{\alpha_1}, \dots, n_{\alpha_I}, n_{\beta_1}, \dots, n_{\beta_J})$  sont entiers positifs, le modèle défini par la relation (1) est dit lui-même entier. La procédure d'estimation du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$ , basée sur l'utilisation des moindres carrés linéaires, est entièrement décrite dans l'ouvrage de Ljung [5].

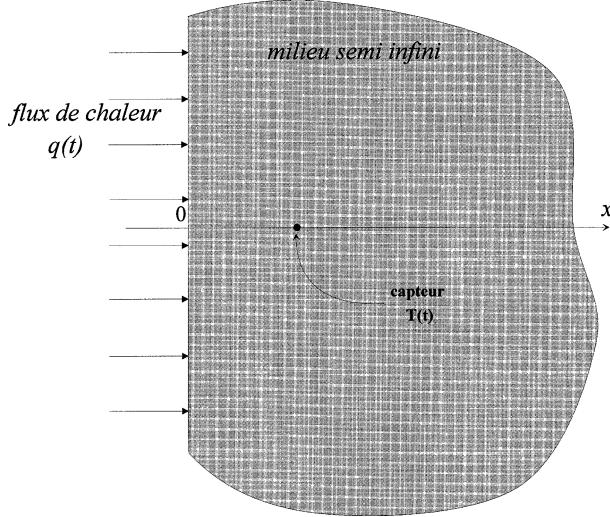
On constate dans certains cas, selon la nature du système mais aussi de la position du capteur, qu'un modèle entier se révèle inapte à reproduire correctement l'évolution de la température au point de mesure, même



**Figure 1.** Méthode d'estimation du flux de chaleur à la surface d'un système à l'aide d'un modèle direct identifié.  
**Figure 1.** Heat flux estimation method at the boundary of a system using an identified model as the direct model.

avec un grand nombre de paramètres. Afin de mieux en comprendre la raison, considérons l'exemple de la diffusion de la chaleur dans un milieu semi-infini sou-

mis à un flux de chaleur  $q(t)$  sur sa frontière de surface  $S$  (voir la figure 2). En considérant un état initial isotherme et nul, les équations mathématiques décri-



**Figure 2.** Flux de chaleur appliqué à à la surface d'un milieu semi-infini.

**Figure 2.** Heat flux applied at the surface of a semi infinite medium.

vant le transfert de chaleur unidirectionnel dans le milieu sont :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{q(t)}{S} \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (3)$$

$$T(x, t) = 0 \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (4)$$

En appliquant la transformée de Laplace, on obtient l'expression de la température dans le domaine opérationnel en tout point sous la forme :

$$\bar{T}(x, p) = \frac{1}{\sqrt{p} \sqrt{\lambda \rho C_p S}} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}} x\right) q(p) \quad (5)$$

$p$  : variable de Laplace, qui vaut au point d'abscisse  $x = 0$  :

$$\bar{T}(0, p) = \frac{1}{\sqrt{p} \sqrt{\lambda \rho C_p S}} q(p) \quad (6)$$

Cette dernière relation peut se mettre sous une forme qui fait apparaître clairement l'exposant réel de la variable de Laplace devant le température elle même exprimée dans le domaine opérationnel, soit :

$$p^\alpha \bar{T}(0, p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p S}} q(p) \quad (7)$$

avec  $\alpha = 1/2$ . Or, il a été math  matisquement prou  v   [6] que la transformée de Laplace de la dérivée  $n^{\text{th}}$  d'une

fonction, où l'ordre de dérivation  $n$  est réel positif, est une généralisation de la transformation plus usité pour un ordre de dérivation entier, soit :

$$L[(D^n f)(t)] = p^n F(p) - \sum_{i=0}^{m-1} p^{m-1-i} D^{i-m+n} f(0) \quad (8)$$

avec  $n$  réel positif, où  $m$  est la partie entière de  $(n + 1)$  et  $F(p)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ . La notion de dérivée d'ordre réel, aussi appell  e dérivée fractionnaire, a été introduite par Riemann et Liouville [7], comme étant la généralisation de la dérivée classique d'ordre entier. Il est été de noter que bien que de nombreux travaux mathématiques soient basés sur le calcul différentiel généralisé, il n'existe que très peu d'applications de cet outil dans le domaine des sciences pour l'ingénier. Son utilisation dans le domaine de la commande robuste et de l'amortissement des processus mécaniques a par contre été largement traitée par Oustaloup [8].

Ainsi, à partir de la transformation (8) et de la relation (7), on trouve que l'évolution de la température au point d'abscisse  $x = 0$ , lorsque l'état thermique initial est nul, est solution de l'équation différentielle :

$$D^{1/2}(T(0, t)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p S}} q(t) \quad (9)$$

Cette relation faisant apparaître un ordre de dérivation réel de la température au point d'abscisse  $x = 0$ , il est alors clair qu'un modèle entier ne peut pas représenter correctement l'évolution de la température en ce point, même lorsque l'on prend un nombre élevé de paramètres.

L'équation (5) peut être approchée à partir d'un développement en série entière de l'exponentielle sous la forme suivante :

$$\bar{T}(x, p) = \frac{1}{\sqrt{p} \sqrt{\lambda \rho C_p S}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{p/a} x)^n}{n!} q(p) \quad (10)$$

En développant la somme, le deuxième membre de la relation (10) s'écrit :

$$\begin{aligned} c_0 p^{-1/2} + c_1 + c_2 p^{1/2} + c_3 p + c_4 p^{3/2} + \dots \\ + c_n p^{(n-1)/2} + \dots \quad \text{avec} \\ c_n = \frac{(-x/\sqrt{a})^n q(p)}{n! \sqrt{\lambda \rho C_p S}} \end{aligned} \quad (11)$$

On constate que cette expression comporte alternativement des termes qui correspondent d'après la transformation (8)    des dérivées d'ordre entier et non entier dans le domaine temporel. Ceci implique donc que

quelle que soit la valeur de  $x$ , le modèle est non entier. Une deuxième conséquence est qu'il sera nécessaire de conserver un nombre de termes d'autant plus important dans l'équation (11) que l'on séloignera de la surface du milieu.

La suite de l'article s'articule de la façon suivante. Nous rappelons tout d'abord la méthode d'estimation, développée par Le Lay [9], des paramètres du modèle représenté par l'équation (1) lorsque les ordres de dérivation sont réels. Cette méthode est basée sur la forme récurrente de l'équation différentielle. Les paramètres de l'équation récurrente sont estimés à partir de mesures de la sollicitation et de la température au point de positionnement du capteur. L'algorithme d'estimation est celui des moindres carrés linéaires. On vérifie que l'estimation des paramètres est non biaisée à partir du calcul de la fonction d'autocorrélation des résidus. Une première application, basée sur des données numériques obtenues par simulation du milieu semi-infini décrit précédemment, permet de montrer l'avantage d'utiliser un modèle non entier pour sa cohérence avec les phénomènes physiques observés. La deuxième application, basée sur des mesures réelles de température, montre l'influence de l'erreur globale de mesure sur l'identification par modèle non entier.

Nous développons enfin une procédure d'estimation du flux de chaleur appliquée à la surface du milieu semi-infini à l'aide du modèle non entier estimé. Cette estimation est basée sur des données de température, en un point à l'intérieur du milieu, simulées numériquement à l'aide du modèle analytique. Un bruit blanc est superposé à ces mesures. L'algorithme d'estimation utilise la méthode des moindres carrés linéaires avec un terme de régularisation.

## 2. EXPRESSION DU MODÈLE NON ENTIER SOUS UNE FORME RÉCURRENTE

La procédure d'estimation des paramètres  $\theta_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$  de l'équation (1) dont les ordres  $(n_{\alpha_1}, \dots, n_{\alpha_I}, n_{\beta_1}, \dots, n_{\beta_J})$  sont réels, est établie à partir de la formulation de cette équation sous une forme récurrente. A cet effet, les dérivées généralisées de  $T(t)$  et  $q(t)$  sont exprimées sous leur forme discrète lorsque  $h$  tend vers 0, les fonctions  $T(t)$  et  $q(t)$  étant en l'occurrence considérées causales, soit (voir Annexe) :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_\alpha} T(t) = \frac{1}{h^{n_\alpha}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_\alpha}{k} T(t - kh) \quad (12)$$

et

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_\alpha} q(t) = \frac{1}{h^{n_\alpha}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_\alpha}{k} q(t - kh) \quad (13)$$

où

$$\binom{n_\alpha}{k} = \frac{n_\alpha(n_\alpha - 1) \cdots (n_\alpha - k + 1)}{k!}$$

et  $K = t/h$ ,  $h$  désignant la période d'échantillonnage. Les relations (12) et (13) montrent que les dérivées non entières des fonctions  $T(t)$  et  $q(t)$  à un instant  $t$  prennent en compte les valeurs de ces fonctions à tous les instants du passé. Ainsi, contrairement à la dérivée entière, la dérivée non entière d'une fonction est une caractérisation globale de cette fonction, ce qui permet de la discriminer d'autres fonctions dont le passé est différent. A partir des relations (12) et (13), il est alors possible d'écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{n_{\alpha_i}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{\alpha_i}}{k} T(t - kh) \\ &= \sum_{j=1}^J \frac{\beta_j}{h^{n_{\beta_j}}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{\beta_j}}{k} q(t - kh) + e(t) \end{aligned} \quad (14)$$

A partir de cette relation, nous constatons que le modèle liant la température  $T(t)$  à l'instant  $t$  à la température aux instants précédents et à la sollicitation  $q(t)$  est non linéaire vis-à-vis des paramètres  $\theta_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$ . Nous écrivons alors la relation (14) sous la forme suivante :

$$T(t) = - \sum_{i=1}^I a_i \tilde{T}_i(t) + \sum_{j=1}^J b_j \tilde{q}_j(t) + \tilde{e}(t) \quad (15)$$

où les paramètres  $a_i$  et  $b_j$  sont tels que :

$$a_i = \frac{\alpha_i / h^{n_{\alpha_i}}}{\sum_{j=1}^I \alpha_j / h^{n_{\alpha_j}}}, \quad 1 \leq i \leq I \quad (16i)$$

et

$$b_j = \frac{\beta_j / h^{n_{\beta_j}}}{\sum_{i=1}^I \alpha_i / h^{n_{\alpha_i}}}, \quad 1 \leq j \leq J \quad (16ii)$$

et où la fonction  $T(t)$  est cette fois-ci linéaire vis-à-vis des nouveaux paramètres  $\hat{\theta}_r = (a_1, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$ .

Une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires est alors applicable. Une contrainte sur les coefficients  $a_i$  se déduit de la relation (16i), soit :

$$\sum_{i=1}^I a_i = 1 \quad (17)$$

Les fonctions scalaires  $\tilde{T}_i(t)$  et  $\tilde{q}_j(t)$  sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(t) &= \sum_{k=1}^K (-1)^k \binom{n_{\alpha_i}}{k} T(t - kh) \quad \text{et} \\ \tilde{q}_j(t) &= \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_{\beta_j}}{k} q(t - kh) \end{aligned} \quad (18)$$

La nouvelle erreur de modélisation  $\tilde{e}(t)$  est quant à elle égale au produit de l'erreur de modélisation  $e(t)$  par un coefficient de pondération et s'écrit :

$$\tilde{e}(t) = \frac{e(t)}{\sum_{j=1}^I \alpha_j / h^{n_{\alpha_j}}} \quad (19)$$

Dans ce qui suit, nous développons la procédure d'estimation des paramètres  $(a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$  de l'équation (15), le paramètre  $a_1$  se déduisant de l'équation (17) par  $a_1 = 1 - \sum_{i=2}^I a_i$ . Le retour aux paramètres  $\theta_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$  s'effectue à l'aide des équations (16i) et (16ii).

### 3. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE RÉCURRENT

#### 3.1. Algorithme d'identification

Nous allons dans un premier temps rechercher le vecteur optimal  $\hat{\theta}_r = (a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$  qui minimise la quantité  $S = \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{E}}$  dans laquelle  $\tilde{\mathbf{E}}^T = [\tilde{e}(k), \tilde{e}(k+1), \dots, \tilde{e}(k+N)]$  avec  $\tilde{e}(k) = T(k) - \hat{T}(k)$ , désigne l'écart de température entre la mesure et la valeur issue du modèle au temps  $t = k$ ,  $N$  étant le nombre de mesures réalisées. On peut alors écrire l'équation (15) pour  $N$  mesures successives sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\hat{\theta}_r + \tilde{\mathbf{E}} \quad (20)$$

avec :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} T(k) + \tilde{T}_1(k) \\ T(k+1) + \tilde{T}_1(k+1) \\ \vdots \\ T(k+N) + \tilde{T}_1(k+N) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$\mathbf{H}$  représente la matrice de sensibilité du modèle non entier sous forme récurrente vis-à-vis des paramètres  $\hat{\theta}_r = (a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$  à estimer. Dans notre cas, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\tilde{T}_2(k) + \tilde{T}_1(k) & \dots & -\tilde{T}_I(k) + \tilde{T}_1(k) & \tilde{q}_1(k) & \dots & \tilde{q}_J(k) \\ -\tilde{T}_2(k+1) + \tilde{T}_1(k+1) & \dots & -\tilde{T}_I(k+1) + \tilde{T}_1(k+1) & \tilde{q}_1(k+1) & \dots & \tilde{q}_J(k+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\tilde{T}_2(k+N) + \tilde{T}_1(k+N) & \dots & -\tilde{T}_I(k+N) + \tilde{T}_1(k+N) & \tilde{q}_1(k+N) & \dots & \tilde{q}_J(k+N) \end{bmatrix} \quad (22)$$

La résolution du système (20) au sens des moindres carrés donne le vecteur estimé  $\hat{\theta}_r^e$  des paramètres  $\hat{\theta}_r = (a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$  sous la forme bien connue [5] :

$$\hat{\theta}_r^e = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} \quad (23)$$

Les paramètres  $\alpha_i$  du modèle continu se déduisent de la relation (16i), par la résolution du système d'équations suivant (si l'on impose  $\alpha_I = 1$ ) :

$$\begin{bmatrix} (a_1 - 1)h^{-n_{\alpha_1}} & a_1 h^{-n_{\alpha_2}} & \dots & a_1 h^{-n_{\alpha_{I-1}}} \\ a_2 h^{-n_{\alpha_1}} & (a_2 - 1)h^{-n_{\alpha_2}} & \dots & a_2 h^{-n_{\alpha_{I-1}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{I-1} h^{-n_{\alpha_1}} & a_{I-1} h^{-n_{\alpha_2}} & \dots & (a_{I-1} - 1)h^{-n_{\alpha_{I-1}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{I-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 h^{-n_{\alpha_I}} \\ -a_2 h^{-n_{\alpha_I}} \\ \vdots \\ -a_{I-1} h^{-n_{\alpha_I}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

La relation (16ii) permet de déterminer directement les  $\beta_j$  conformément à l'expression :

$$\beta_j = b_j \sum_{i=1}^I \alpha_i h^{n_{\beta_j} - n_{\alpha_i}} \quad (25)$$

### 3.2. Détermination de la structure optimale du modèle d'identification

Un des choix importants dans l'identification d'un système est celui du nombre de paramètres à accorder au modèle d'identification, à savoir  $I$  et  $J$ , ainsi que celui des ordres de dérivation  $n\alpha_i$  et  $n\beta_j$  ( $1 \leq i \leq I$ ,  $1 \leq j \leq J$ ).

L'exemple traité dans l'introduction et caractérisé par l'équation (11), nous incite à choisir systématiquement des ordres de dérivation multiples de 1/2. Cette démarche est basée sur la connaissance de solutions analytiques à des problèmes de conduction dans les matériaux solides pour différentes conditions aux limites, dans des configurations géométriques simples [10]. Dans toutes nos applications, l'équation (1) sera donc de la forme :

$$\begin{aligned} & \alpha_1 D^{(0)} T(t) + \alpha_2 D^{(0.5)} T(t) + \alpha_3 D^{(1.5)} T(t) + \dots \\ & = \beta_1 D^{(0)} q(t) + \beta_2 D^{(0.5)} q(t) + \beta_3 D^{(1)} q(t) + \dots \\ & + e(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Le nombre optimal de paramètres est déterminé en fonction de l'évolution relative d'un critère qui calcule la variance de  $\tilde{\mathbf{E}}$  lorsque le nombre de paramètres à estimer croît. Une valeur non biaisée de la variance de  $\tilde{\mathbf{E}}$  s'écrit :

$$\psi = \frac{1 + n/N}{1 - n/N} (\tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{E}}) \quad \text{avec } n = I + J \quad (27)$$

Lorsque, pour deux valeurs successives de  $n$ , l'évolution relative de  $\psi$  est inférieure à une valeur définie préalablement (nous avons choisi ici  $10^{-7}$ ), l'itération sur  $n$  s'arrête.

### 3.3. Matrice de covariance des paramètres du modèle non entier récurrent et validation du modèle

Nous adoptons les hypothèses selon lesquelles les erreurs de mesure  $e(t)$  sont additives, non corrélées et de variance  $\sigma^2$  constante. La relation (19) montre que ces hypothèses restent vraies pour les résidus  $\tilde{e}(t)$ . On définit alors la matrice de covariance sur les paramètres  $\hat{\theta}_r = (a_2, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J)$  comme [11] :

$$\text{cov}(\hat{\theta}_r^e) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \text{cov}(a_1, a_2) & . & . & . & \text{cov}(a_1, b_J) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \sigma_{a_{I-1}}^2 & . & . & . & . & . \\ \sigma_{b_1}^2 & . & . & . & . & . \\ \text{Sym} & . & . & . & . & \text{cov}(b_{J-1}, b_J) \\ . & . & . & . & . & \sigma_{b_J}^2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Avec les hypothèses sur le bruit précédemment citées, un estimateur non biaisé de  $\sigma^2$  satisfait à la relation :

$$\sigma^2 = \frac{\tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{E}}}{N - (I + J)} \quad (29)$$

Même lorsque l'écart-type sur chaque paramètre, défini comme la racine carrée de la variance, est petit, il est nécessaire de valider les hypothèses formulées précédemment sur le bruit de mesure. Si l'on reporte la valeur esti-

mée  $\hat{\theta}_r^e$  dans l'équation (20), on obtient :

$$\hat{\theta}_r^e = \hat{\theta}_r + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{E}} \quad (30)$$

L'estimation asymptotique de la valeur moyenne de  $\hat{\theta}_r^e$  s'écrit alors :

$$E[\hat{\theta}_r^e] = \hat{\theta}_r + (E[\mathbf{H}(k)^T \mathbf{H}(k)])^{-1} E[\mathbf{H}(k)^T \tilde{e}(k)] \quad (31)$$

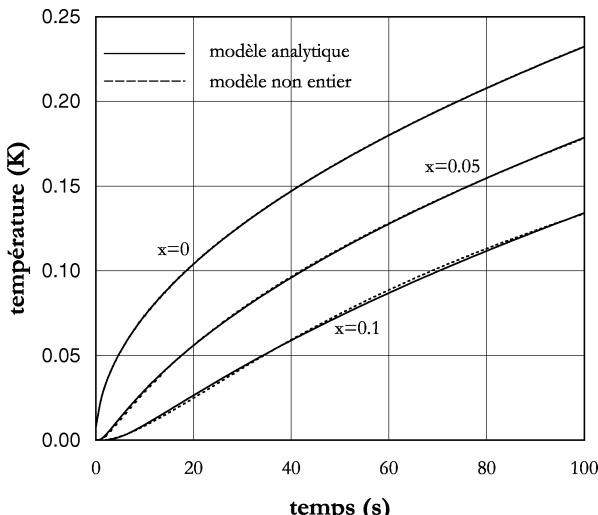
Ceci implique que si  $\tilde{e}(k)$  est une séquence corrélée avec  $\mathbf{H}(k)$  ou si  $\tilde{e}(k)$  est à moyenne non nulle, alors l'estimateur sera biaisé. Cette vérification s'effectue donc a posteriori.

Enfin, les relations (24) et (25), permettant d'exprimer les paramètres  $\theta_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$  de l'équation différentielle à partir des paramètres  $\hat{\theta}_r = (a_1, \dots, a_{I-1}, b_1, \dots, b_J)$  de l'équation récurrente, montrent que les domaines de validité des paramètres de  $\theta_r$  dépendent fortement de ceux de  $\hat{\theta}_r$ .

## 4. APPLICATION

### 4.1. Analyse à partir d'une simulation numérique

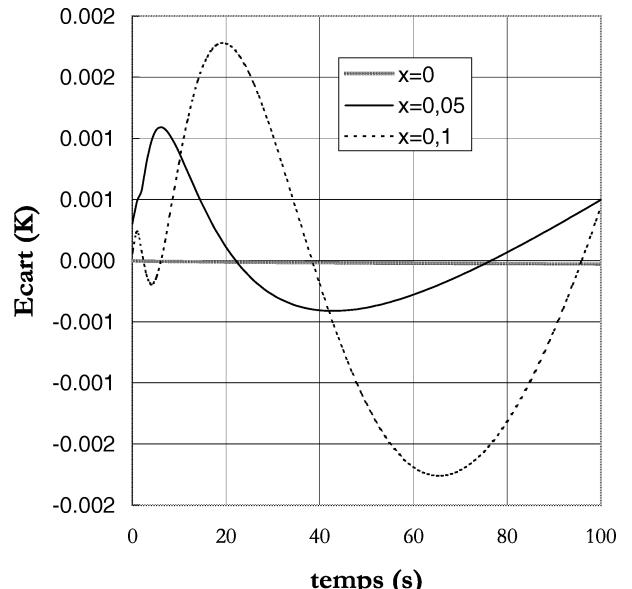
Nous considérons un milieu semi-infini en aluminium ( $\lambda = 175 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 5,616 \cdot 10^5 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ ). Ce



**Figure 3.** Réponses en température du modèle analytique et du modèle non entier identifié pour différentes abscisses.

**Figure 3.** Calculated temperature from the analytical model and the non-integer identified model at different locations.

milieu est soumis à un échelon de flux de chaleur  $q_0 h(t)$  uniforme sur la surface du matériau. Dans un premier temps, nous simulons la réponse du modèle au point de mesure du thermocouple à un échelon unitaire du flux grâce à la solution analytique. Puis, nous recherchons le modèle non entier qui approche au mieux la réponse analytique. Nous réalisons ces essais pour trois positions du thermocouple :  $x = 0$ ,  $x = 5 \text{ cm}$  et  $x = 10 \text{ cm}$ . Les résultats sont présentés sous deux formes différentes correspondant aux figures 3 et 4. La figure 3 représente l'évolution de la température calculée, pour les deux modèles, aux différents points de positionnement. La figure 4 représente les écarts entre la réponse analytique et celle calculée à partir du modèle non entier. En  $x = 0$ , il suffit de choisir les ordres  $n_{\alpha_1} = 0,5$  et  $n_{\beta_1} = 0$  pour le modèle non entier. Dans ce cas la réponse du modèle non entier est parfaitement confondue avec la solution analytique et les paramètres correspondent à ceux du modèle physique. Les valeurs des paramètres estimés sont portées dans le tableau I. Les écart-types sur les paramètres du modèle récurrent estimés n'apparaissent pas étant donné que la réponse calculée à partir du modèle analytique, n'est entachée d'aucun bruit. Nous avons par contre porté la valeur du critère calculée à partir de la relation (27). Nous constatons que les réponses des modèles non entier obtenus pour  $x = 5 \text{ cm}$  et  $x = 10 \text{ cm}$  sont très proches des réponses du modèle analytique. Par



**Figure 4.** Écart entre les températures calculées à partir du modèle analytique et du modèle non entier identifié.

**Figure 4.** Gap between the calculated temperatures from the analytical model and the non-integer identified model.

TABLEAU I / TABLE I

Valeurs des paramètres identifiés ( $\alpha_i, \beta_j$ ) et des ordres ( $n\alpha_i, n\beta_j$ ) des modèle non entiers.  
Identified parameters ( $\alpha_i, \beta_j$ ) and associated orders ( $n\alpha_i, n\beta_j$ ) of the non-integer models.

Position du point de mesure (m)	Identification par modèle d'ordre non entier		$\psi$ (modèle non entier)
$x = 0$	$n_\alpha = [0,5]$	$\alpha = [1]$	$4,1471 \cdot 10^{-8}$
	$n_\beta = [0]$	$\beta = [0, 0206]$	
		$= \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}}$	
$x = 0,05$	$n_\alpha = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$\alpha = \begin{bmatrix} 0,3249 \\ 0,4904 \\ 1 \end{bmatrix}$	$1,7228 \cdot 10^{-5}$
	$n_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$\beta = \begin{bmatrix} 0,0066 \\ 0,0052 \end{bmatrix}$	
$x = 0,1$	$n_\alpha = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$\alpha = \begin{bmatrix} 0,0513 \\ -0,0093 \\ 1 \end{bmatrix}$	$1,4473 \cdot 10^{-4}$
	$n_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$\beta = \begin{bmatrix} 0,7758 \\ -0,8377 \end{bmatrix} 10^{-3}$	

contre, la valeur de  $\psi$  est plus élevée pour  $x = 10$  cm que pour  $x = 5$  cm lorsque l'on considère les mêmes ordres de dérivation pour les deux modèles non entier identifiés. Ceci est en accord avec l'analyse menée dans l'introduction à partir de la relation (11) à savoir que plus l'on s'éloigne de la surface et plus le nombre de termes à conserver croît. La valeur de  $\psi$  est donc un bon indicateur du nombre de paramètres à conserver dans le modèle non entier.

#### 4.2. Analyse à partir d'une expérience réelle

Le dispositif expérimental est constitué d'un bloc en aluminium de type AU4G 2017 sur lequel est disposée une résistance chauffante plate de type Minco MK de  $360 \Omega$ . Une plaque isolante recouvre la résistance chauffante afin que le flux soit dirigé vers le bloc d'aluminium. Un thermocouple cuivre-constantan de  $2/10$  mm de diamètre est disposé entre la résistance et l'aluminium, au centre du bloc. L'épaisseur totale de la résistance et du thermocouple n'excède pas  $2/10$  mm de façon à ne pas introduire une hétérogénéité importante dans le milieu. La résistance chauffante est alimentée par une alimentation stabilisée dont la puissance est mesurée et donc le flux de chaleur est connu précisément. Les deux fils

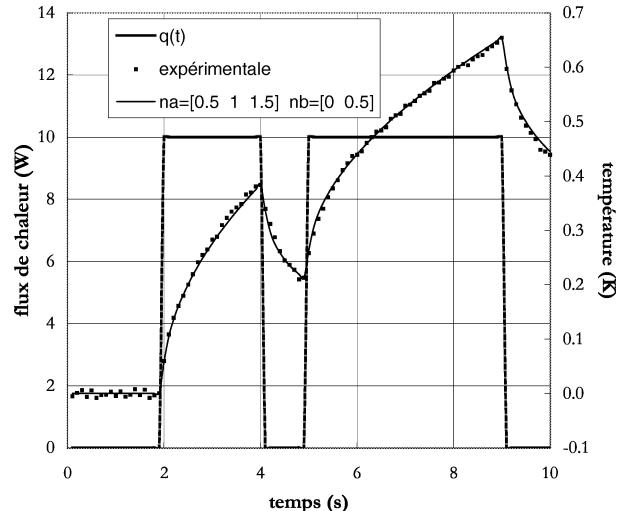


Figure 5. Mesures de la température pour une évolution connue du flux de chaleur.

Figure 5. Temperature measurement from a known heat flux.

du thermocouple sont reliés à des bornes en laiton maintenues à température ambiante. La mesure est amplifiée (gain de l'ampli égal à 3 000) puis le signal est visualisé et enregistré sur un oscilloscope numérique. Afin de diminuer la résistance de contact entre la résistance et le matériau, une fine pellicule de graisse d'argent est ré-

partie sur la surface de contact. Les dimensions du bloc ( $70 \times 70 \times 60$ ) sont telles que le matériau se comporte comme un milieu semi-infini vis-à-vis du thermocouple pour des temps de mesures de l'ordre de quelques dizaines de secondes.

L'estimation des paramètres du modèle non entier peut être guidée par la solution analytique du modèle d'évolution de la température au point de mesure dans le domaine opérationnel, soit [12] :

$$\begin{aligned} \bar{T}(0, p) &= \frac{1}{(\rho C_p)_s V_s p \frac{1}{R_T + 1 / (\sqrt{\lambda} \rho C_p S \sqrt{p})}} q(p) \\ &\Leftrightarrow (a_1 p^{0.5} + a_2 p + a_3 p^{1.5}) \bar{T}(0, p) \\ &= (b_1 + b_2 p^{0.5}) q(p) \end{aligned} \quad (32)$$

avec  $a_1 = \sqrt{\lambda \rho C_p} S \sqrt{p}$ ,  $a_2 = (\rho C_p)_s V_s$ ,  $a_3 = a_2 b_2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = a_1 R_T$ .

Dans cette relation,  $R_T$  désigne la somme de la résistance thermique de contact et de la résistance interne du thermocouple,  $V_s$  est le volume du thermocouple et  $(\rho C_p)_s$  est la capacité thermique du thermocouple. On voit bien, de par leur expression, que ces paramètres sont corrélés et que l'identification ne peut en aucun cas conduire aux paramètres physiques du système.

A partir de la réponse à des créneaux du flux de chaleur, nous estimons les paramètres  $\hat{\theta}_r$  du modèle récurrent avec la relation (23). Les paramètres  $\theta_r$  de l'équation différentielle sont calculés à partir des relations (24)

TABLEAU II / TABLE II

Valeurs des paramètres identifiés à partir de la mesure de la réponse en température pour un échelon de flux de chaleur.

Identified parameters from the response to a unit step of the heat flux.

Ordre de dérivation	Paramètres du modèle différentiel	$\psi$
$n_\alpha = [0,5]$	$\alpha = [1]$	$1,297 \cdot 10^{-4}$
$n_\beta = [0]$	$\beta = [0,0233]$	
$n_\alpha = [0,5]$	$\alpha = [1]$	$1,257 \cdot 10^{-4}$
$n_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$\beta = \begin{bmatrix} 0,0231 \\ 0,0004 \end{bmatrix}$	
$n_\alpha = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$\alpha = \begin{bmatrix} 39,77 \\ -7,23 \\ 1 \end{bmatrix}$	$4,691 \cdot 10^{-5}$
$n_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$\beta = \begin{bmatrix} 0,94 \\ -0,15 \end{bmatrix}$	

et (25) et sont portés dans le *tableau II*. Il apparaît clairement que la valeur du critère d'arrêt sur le nombre de paramètres défini par la relation (27) est la plus petite que l'on puisse obtenir pour les ordres de dérivation  $n_\alpha = [0,5 \ 1 \ 1,5]$  et  $n_\beta = [0 \ 0,5]$ . On constate sur la *figure 5* que le modèle théorique exprimé par la relation (32) et défini par les ordres optimaux s'approche, avec un écart très faible, de la réponse expérimentale. Par contre les valeurs des paramètres estimés n'ont pas de sens physique, certains paramètres ayant des valeurs négatives. Ce résultat montre l'influence du bruit de mesure sur les valeurs des paramètres estimés lorsque les para-

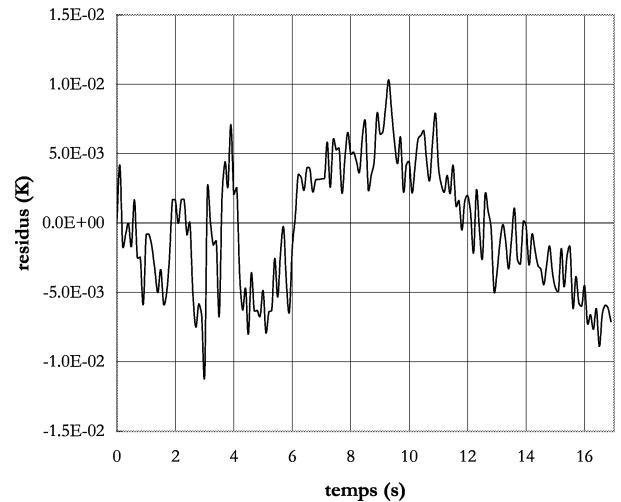


Figure 6. Calculs des résidus.

Figure 6. Computation of the residuals.

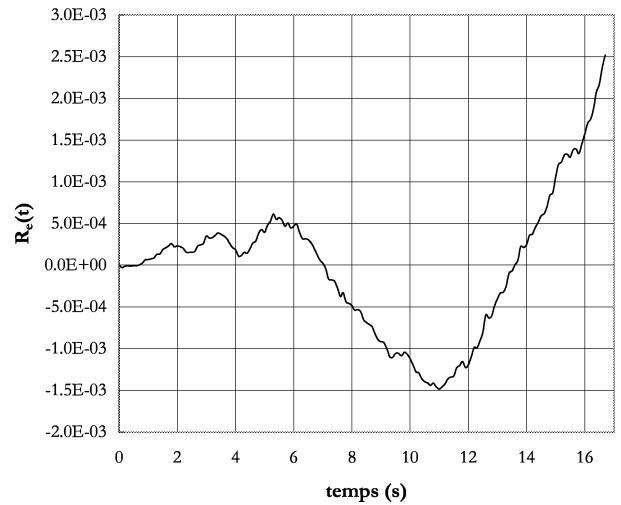
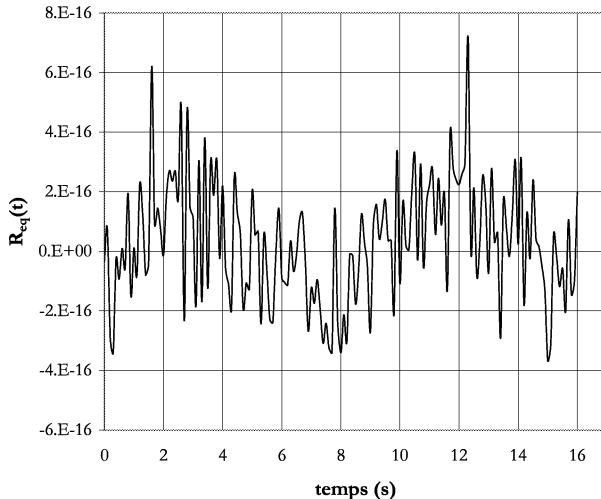


Figure 7. Fonction d'autocorrélation des résidus.

Figure 7. Autocorrelation function of the residuals.

TABLEAU III / TABLE III  
 Écarts-type sur les paramètres identifiés.  
 Standard errors on the identified parameters.

Ordre de dérivation	Paramètres du modèle récurrent	Paramètres du modèle différentiel	Ecarts-type
$n_\alpha = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$a = \begin{bmatrix} 1,4793 \\ -0,8513 \\ 0,3720 \end{bmatrix}$	$\alpha = \begin{bmatrix} 39,77 \\ -7,23 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\sigma_a = \begin{bmatrix} 0,203 \\ 0,0759 \\ 0 \end{bmatrix}$
$n_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$b = \begin{bmatrix} 0,011 \\ -0,0058 \end{bmatrix}$	$\beta = \begin{bmatrix} 0,94 \\ -0,15 \end{bmatrix}$	$\sigma_b = \begin{bmatrix} 0,0013 \\ 0,0015 \end{bmatrix}$



**Figure 8.** Fonction de corrélation entre le flux de chaleur et les résidus.

**Figure 8.** Correlation function between the residus and the heat flux.

mètres physiques sont corrélés comme c'est le cas dans la relation (32). Les écart-types sur les paramètres estimés du modèle récurrent sont calculés à partir de la relation (28) et sont portés dans le *tableau III*. Ces écarts sont faibles et confortent la détermination optimale du nombre de paramètres du modèle. L'examen des résidus  $e(t)$  ainsi que des fonctions d'inter et d'autocorrélation introduites à travers la relation (31), permet de conclure sur la valeur non biaisée du vecteur des paramètres estimés. Sur les *figures 6, 7 et 8* sont respectivement représentés les résidus  $e(t)$ , la fonction d'autocorrélation de  $e(t)$  définie par

$$R_e(k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} e(r-k)e(r)$$

et la fonction d'inter-corrélation de  $e(t)$  avec  $q(t)$  définie par

$$R_{eq}(k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} e(r-k)q(r)$$

## 5. UTILISATION DU MODÈLE NON ENTIER POUR L'ESTIMATION DU FLUX

### 5.1. Démarche

Si nous posons que la valeur de la sollicitation  $q(t)$  à l'instant initial  $t = 0$  est égale à celle à l'instant  $t = h$  ( $h$  étant la période d'échantillonnage) et que le modèle estimé est exact, c'est-à-dire que l'erreur de modélisation  $e(t)$  est nulle quel que soit  $t$ , nous pouvons représenter la relation (14) sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{AT} = \mathbf{BQ} \quad (33)$$

dans laquelle les vecteurs **T** et **Q** sont tels que :

$$\mathbf{T} = [T(h) \quad T(2h) \dots T(Nh)] \quad (34)$$

$$\mathbf{Q} = [q(h) \quad q(2h) \dots q(Nh)] \quad (35)$$

et où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices triangulaires inférieures définies par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{-n\alpha_i}} (-1)^0 \binom{n\alpha_i}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{-n\alpha_i}} (-1)^1 \binom{n\alpha_i}{1} & \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{-n\alpha_i}} (-1)^0 \binom{n\alpha_i}{0} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{-n\alpha_i}} (-1)^{N-1} \binom{n\alpha_i}{N-1} & \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{-n\alpha_i}} (-1)^{N-2} \binom{n\alpha_i}{N-1} & \dots & \sum_{i=1}^I \frac{\alpha_i}{h^{-n\alpha_i}} (-1)^0 \binom{n\alpha_i}{0} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left( \sum_{i=1}^J \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^1 \binom{n\alpha_i}{1} + \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^0 \binom{n\beta_i}{0} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \left( \sum_{i=1}^J \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^2 \binom{n\alpha_i}{2} + \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^1 \binom{n\beta_i}{1} \right) & \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^0 \binom{n\beta_i}{0} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \sum_{i=1}^J \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^N \binom{n\alpha_i}{N} + \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^{N-1} \binom{n\beta_i}{N-1} \right) & \sum_{i=1}^J \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^{N-2} \binom{n\beta_i}{N-2} & \dots & \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{h^{-n\beta_i}} (-1)^0 \binom{n\beta_i}{0} \end{bmatrix} \quad (37)$$

On en déduit alors que :

$$\mathbf{T} = \mathbf{XQ} \quad (38)$$

la matrice  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  étant la matrice de sensibilité du vecteur de la température aux différents instants vis-à-vis du vecteur de la sollicitation aux même instants. Ainsi, si  $\mathbf{Y}$  désigne le vecteur de  $N$  mesures expérimentales, le vecteur  $\mathbf{Q}$  est égal, au sens des moindres carrés linéaires, à [1, 13] :

$$\mathbf{Q}_e = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \tau (W_0 \mathbf{I} + W_1 \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 + W_2 \mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2))^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - T(t=0) \mathbf{1}) \quad (39)$$

qui minimise la fonctionnelle :

$$S(\tau) = S_0 + \tau (W_0 (\mathbf{H}_0 \mathbf{Q})^T \mathbf{H}_0 \mathbf{Q} + W_1 (\mathbf{H}_1 \mathbf{Q})^T \mathbf{H}_1 \mathbf{Q} + W_2 (\mathbf{H}_2 \mathbf{Q})^T \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}) \quad (40)$$

avec :

$$S_0 = (\mathbf{Y} - \mathbf{T})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}) \quad (41)$$

Dans cette relation,  $\tau$  désigne le paramètre de régularisation et  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$  sont les coefficients de pondération des matrices  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  correspondant à des termes de régularisation d'ordre 0, 1 et 2 respectivement. Nous rappelons que :

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Le choix de  $\tau$  et des coefficients de pondération  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$  n'est pas simple et dépend essentiellement des erreurs de mesure et du nombre d'échantillons. Pour cela, il est nécessaire de rappeler la signification physique des termes de régularisation d'ordre 0, 1 et 2. La régularisation d'ordre 0 a pour effet de minimiser les variations de la valeur estimée du flux  $q_e(t)$  à l'instant  $t$ . La régularisation au premier ordre minimise la variation de  $q_e(t)$  en fonction de la valeur estimée  $q_e(t-h)$  à l'instant précédent. Enfin, la régularisation au deuxième ordre minimise la variation de  $q_e(t)$  en fonction des valeurs de  $q_e(t-h)$  et de  $q_e(t+h)$ . Il conviendra donc de privilégier l'ordre 0, 1 ou 2 de régularisation en fonction, d'une part, de l'échantillonnage et, d'autre part, de la constante de temps principale d'évolution de la température dans le système. Ceci étant, c'est de la valeur de  $\tau$  dont va dépendre principalement l'inversion. Tikhonov [13] préconise de rechercher la valeur optimale de  $\tau$  telle que  $S(\tau)$  défini à l'équation (40) soit minimum. Plusieurs méthodes permettent d'estimer  $\tau$ , la plus simple étant de réaliser des essais successifs et de vérifier que pour la valeur de  $\tau$  retenue la fonctionnelle  $S(\tau)$  est minimale ; c'est la méthode que nous avons retenue.

## 5.2. Application numérique

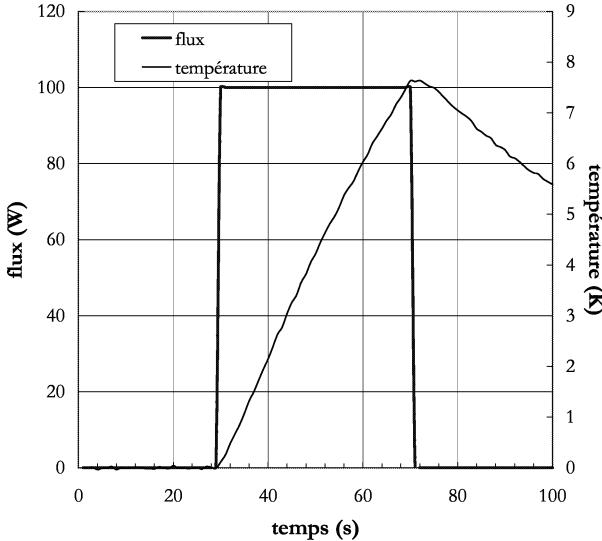
Nous considérons le milieu semi-infini décrit dans les applications précédentes. Afin de prendre en compte l'influence d'un retard dans la réponse en température au niveau du capteur, nous considérons un matériau moins conducteur que l'aluminium, a savoir de l'acier ( $\lambda = 15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 8,48 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ ). A l'aide de la solution analytique, nous simulons la réponse en température en  $x = 2 \text{ mm}$  à un échelon du flux de chaleur et nous superposons à cette réponse un bruit blanc d'écart-type  $\sigma = 0,1 \text{ K}$ . Les paramètres du modèle non entier sont estimés sur la base de cette réponse. Les résultats de l'identification sont portés dans le *tableau IV*. Dans un deuxième temps, nous simulons la réponse du modèle non entier à un créneau de flux (voir *figure 9*). Ces températures constituent le vecteur des températures mesurées  $\mathbf{Y}$  et sont utilisées dans la relation (39) pour l'estimation du flux.

Par la méthode d'essais successifs décrite au paragraphe précédent, nous trouvons que la valeur de  $\tau = 10^{-6}$  est celle qui permet d'atteindre la plus petite valeur de  $S(\tau)$  définie par la relation (40). Nous avons tracé sur la *figure 10* l'évolution du flux exact et celui estimé avec

TABLEAU IV / TABLE IV  
Paramètres du modèle identifié, utilisé pour l'estimation du flux.  
Identified parameters of the non integer model used in the estimation procedure of the heat flux.

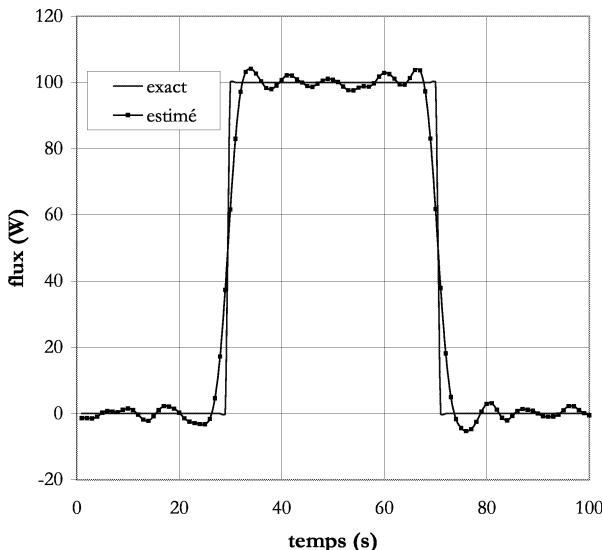
Ordre de dérivation	Paramètres du modèle récurrent	Paramètres du modèle différentiel
$n_\alpha =$	$a =$	$\alpha =$
0,5	0,0132	28,69
1	0,0707	48,26
1,5	0,048	10,36
2	0,738	50,4
2,5	-1,703	-36,76
3	3,589	24,5
3,5	-3,221	-6,95
4	1,465	1
$n_\beta = [0]$	$b = [7,71 \cdot 10^{-5}]$	$\beta = [0,5265]$

les coefficients  $\tau = 10^{-6}$ ,  $W_0 = 1$ ,  $W_1 = 2$  et  $W_2 = 10$ . On visualise sur la *figure 11*, l'influence des coefficients de pondération  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$  dans le terme de régularisation sur la valeur du flux estimé à chaque instant. Ces essais montrent l'influence de ces paramètres sur la qua-



**Figure 9.** Calcul de la température à partir du modèle analytique et superposition d'un bruit blanc.

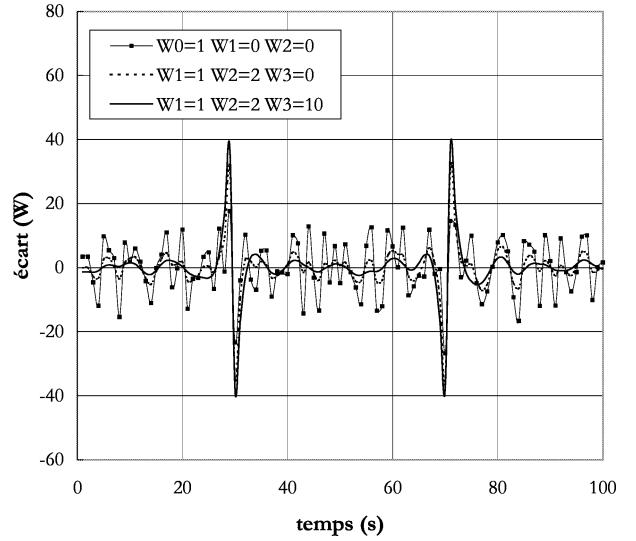
**Figure 9.** Temperature calculated from the analytical model and superposition of a white noise.



**Figure 10.** Estimation du flux de chaleur.

**Figure 10.** Heat flux estimation.

lité des résultats obtenus et la difficulté inhérente à leur choix. Dans notre cas, nous avons privilégié le deuxième ordre car la période d'échantillonnage  $h = 1$  s est petite devant la constante de temps du système qui est infinie.



**Figure 11.** Influence des paramètres de régularisation.

**Figure 11.** Influence of the regularization parameters.

## 6. CONCLUSION

Le choix d'un modèle non entier pour l'identification du comportement thermique instationnaire de systèmes dans certaines configurations est nécessaire. Il a été ainsi montré que l'on ne pouvait identifier le comportement thermique à la surface d'un milieu semi-infini soumis à un flux de chaleur qu'en choisissant des modèles comportant des dérivées non-entières de ces deux grandeurs. Afin de pouvoir estimer les paramètres du modèle, ces dérivées sont remplacées par leur expression discrète. On obtient ainsi un modèle récurrent dont on estime les coefficients par une méthode d'optimisation par moindres carrés linéaires. L'étude de la matrice de covariance sur les paramètres ainsi que celle des fonctions d'inter et d'autocorrélation des résidus permet ensuite de valider le modèle estimé. Cette méthode a été mise en œuvre, d'une part dans l'identification d'un système non entier simulé numériquement à l'aide de l'expression analytique, d'autre part dans l'identification du comportement dynamique entre la température mesurée à la surface d'un bloc en aluminium et un flux de chaleur imposé au même point. Dans les deux cas, les modèles non entier ont conduit à une erreur moindre que les modèles entiers, confirmant ainsi l'étude préliminaire sur le modèle de connaissance.

Dans un deuxième temps, les modèles estimés sont utilisés dans le but d'estimer le flux thermique à la surface du milieu semi-infini, la température étant mesurée au même point que lors de l'identification. La procédure

d'estimation du flux est basée sur la minimisation de l'écart entre la réponse du modèle estimé et les mesures de températures. L'application de cette méthode a ainsi permis d'estimer le flux thermique à la surface d'un milieu semi-infini simulé numériquement à l'aide d'un modèle estimé, l'estimation de ce modèle étant elle-même basée sur une simulation numérique de ce système dont on a bruité les données.

L'identification du modèle de comportement d'un système n'a évidemment d'intérêt que lorsque la modélisation ne peut être réalisée à partir des équations classiques de la thermique, à cause de la méconnaissance des caractéristiques thermiques dudit système par exemple. L'application sur le milieu semi-infini que nous avons traitée ici n'avait donc pour but que pour valider le choix de dérivées fractionnaires dans le modèle de comportement à identifier. La prochaine étape sera donc d'appliquer la même démarche à des procédés beaucoup plus complexes.

## RÉFÉRENCES

- [1] Beck J.V., Blackwell B., Clair C.R.S.T., Jr., Inverse Heat Conduction. III Posed Problems, Wiley Interscience, 1985.
- [2] Videoq E., Petit D., Sadat H., The use of reduced models to solve inverse heat transfer problems, in: Eu-rotherm Seminar N. 53, Faculté Polytechnique de Mons, October 8-10, 1997.
- [3] Beck J.V., Sequential estimation of thermal parameters, J. Heat Transfer 99 (2) (1977) 321-334.
- [4] Battaglia J.-L., Cahuc O., Batsale J.-C., Toulouse D., Métrologie des transferts thermiques dans un bec d'outil en condition d'usinage, Mécanique Industrielle et Matériaux 52 (1) (1999) 95-103.
- [5] Ljung L., System Identification, Theory for the User, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
- [6] Miller K.S., Ross B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley Interscience, 1993.
- [7] Ederly, Operational Calculus and Generalized Functions, Copyright 1962 by Holt, Rinehart and Winston, Calcul opérationnel et fonctions généralisées, Editions Dunod, 1971.
- [8] Oustaloup A., La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications, Editions Hermès, Paris, 1995.
- [9] Le Lay L., Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier, Thèse de doctorat de l'Université Bordeaux 1, 1998.
- [10] Özisik N., Heat Conduction, 2nd edition, Wiley, 1993.
- [11] Beck J.V., Arnold K.J., Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, 1976.
- [12] Zhang X., Métrologie thermique par méthode quasi-stationnaire : modélisation, identification et application à la caractérisation de solides, Thèse de l'institut National Polytechnique de Lorraine, 1993.

[13] Tikhonov A., Arsénine V., Méthodes de résolution des problèmes mal posés, Editions de Moscou, 1976.

## ANNEXE

### Dérivée généralisée d'une fonction causale $f(t)$

Par définition le dérivée de  $f(t)$  s'écrit :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

Une discréttisation de  $t$  au pas d'échantillonnage  $h$  infiniment petit, soit  $t = Kh$ , se traduit par :

$$D^1 f(t) = \frac{f(Kh) - f((K-1)h)}{h}$$

En introduisant l'opérateur  $q$  définit par :

$$q^{-1} f(Kh) = f((K-1)h)$$

on obtient :

$$D^1 f(t) = \frac{1 - q^{-1}}{h} f(Kh)$$

Les mêmes calculs à l'ordre 2 conduisent à :

$$D^2 f(t) = \frac{(1 - q^{-1})^2}{h^2} f(Kh)$$

La généralisation à un ordre de dérivation quelconque (réel ou complexe) est immédiate :

$$D^n f(t) = \frac{(1 - q^{-1})^n}{h^n} f(Kh) \quad n \text{ réel ou complexe}$$

soit en développant  $(1 - q^{-1})^n$  par la formule du binôme de Newton :

$$D^n f(t) = \frac{1}{h^n} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} q^{-k} \right) f(Kh)$$

ou encore étant donné que  $q^{-k} f(Kh) = f((K-k)h) = f(t-kh)$  :

$$D^n f(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f(t-kh)$$

Lorsque l'on considère que  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on a  $f(t - kh) = 0$  pour  $t - kh < 0$ , donc la somme étendue de  $k = 0$  à  $k = \infty$  se réduit à la somme étendue de  $k = 0$  à  $k = K$ , soit :

---

$$\begin{aligned} D^n f(t) \\ = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f(t - kh) \end{aligned}$$

### Abridged English version

#### Heat flux estimation through inverted non-integer identification models

The estimation of heat flux through system surfaces is an important problem in thermal science. Due to the complexity of the geometry of most thermal systems, it is impossible to establish models from knowledge of their physical properties. Heat flux cannot therefore be determined from temperature values using this approach.

In our approach, the parameters of a non-integer identification model of a thermal system are estimated from experimental temperature readings and a set heat flux at the input area. Then using this model for other contexts, heat flux can be estimated for any temperature evolution at the input area (*figure 1*).

Non-integer identification models are based on a continuous non-integer order differential equation

$$\begin{aligned} \alpha_1 D^{(n_{\alpha_1})} T(t) + \cdots + \alpha_I D^{(n_{\alpha_I})} T(t) \\ = \beta_1 D^{(n_{\beta_1})} q(t) + \cdots + \beta_J D^{(n_{\beta_J})} q(t) + e(t) \end{aligned}$$

where  $e(t)$  is the equation error,  $T$  the measured temperature and  $q$  the heat flux. The aim of identification is to find the parameter vector  $\theta_r = (\alpha_1, \dots, \alpha_I, \beta_1, \dots, \beta_J)$  which minimizes a criterion based on the predictor error. By a discretization of the equation, using the discrete definition of a non-integer derivative, and a change of variables, the identification problem can be solved using a linear least squares technique. The initial parameters characterizing the continuous model are then determined by solving a linear system.

This algorithm is applied to the identification of a thermal system assumed to be semi infinite (*figure 2*). We consider an aluminum block (AU4G 2017) on which a heating resistor is mounted. Temperature is measured at the same place by a thermocouple. Due to the simplicity of the system and the assumption that it is semi-infinite, the relation between temperature and flux can be expressed by the equation

$$\begin{aligned} \bar{T}(0, s) &= \frac{1}{(\rho C_p)_s V_s s + \frac{1}{R_T + 1 / (\sqrt{\lambda \rho C_p} S \sqrt{s})}} q(s) \\ \Leftrightarrow (a_1 s^{0.5} + a_2 s + a_3 s^{1.5}) \bar{T}(0, s) &= (b_1 + b_2 s^{0.5}) q(s) \end{aligned}$$

with  $a_1 = \sqrt{\lambda \rho C_p} S \sqrt{p}$ ,  $a_2 = (\rho C_p)_s V_s$ ,  $a_3 = a_2 b_2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = a_1 R_T$ .

Given the form of this equation, the identification model must have a 0.5 order integrator and all the derivative orders must be multiples of 0.5. Identification results for the non integer model are given in *table II*, and *figure 5* shows the real and calculated temperature evolution to be almost identical. Several integer models were also tried but none provided a close resemblance to the real system.

Then from the identified non integer model and temperature readings, the heat flux on the system surface is estimated. The relation between temperature and flux being modeled by the linear matrix equation (33), the flux using a linear least squares technique can be estimated (equation (39)). When temperature readings are noised, weighting coefficients with a regularization term are used to minimize flux agitation. To validate this technique the flux on a steel surface, assumed to be semi-infinite, is estimated using noised simulated data, and a non-integer model established using our identification method (*table IV*). Heat flux estimation is then made using a linear least squares technique. *Figure 10* shows that estimated flux is close to real flux.

In conclusion, a new method is presented for solving inverse problems in thermal conduction, which can be used even if thermal properties of the system are not known. The physical system behavior is accurately identified by a non-integer model, and heat flux is estimated using a linear least squares technique. Application to the estimation of thermal flux on the surface of a semi-infinite material provides good results. This method can therefore be used for more complicated thermal systems.